第十四周习题课 场论

1. 已知与路径无关，求。

解：因为与路径无关，所以

，

。

1. 验证为某个函数的全微分，并求原函数。

解：因为，所以为某个函数的全微分。

记，则

，

其中关于变量为常数，可以是变量的函数。

，

所以，为任意常数。故。

此时，若求，其值为。

1. 力场，求质点在力场的作用下绕原点逆时针一周，力场作的功。

解：设为绕原点逆时针一周的闭曲线，则力场作的功

。

而，所以



其中，逆时针。所以

。

1. 设，求。

解：

。

。

1. 设，求。

解：

。



 （这是无旋场）

1. 证明第二类曲线积分与路径无关，求原函数与。

证明：，，所以第二类曲线积分与路径无关。

求原函数方法一：



为一个原函数。所有原函数为，为任意常数。

求原函数方法二：设为原函数，则

，其中关于变量为常数，可以是的函数。

，

所以 ，其中关于变量是常数，可以是的函数。

，

所以 ，为任意常数。

故原函数为为任意常数。

。

1. 设是实轴上处处为正的连续函数，为圆心在原点的单位开圆盘。

证明：(i)；

(ii)。

证明：对等式(i)的两边线积分，分别应用Green公式得

左边，右边。

由于积分区域为单位圆盘，故上述两个二重积分相等。因此等式(i)成立。

注：对上任何一个二重积分中，作变量代换，就得到另一个二重积分。

(ii) 类似，我们不难看出 ，。

这表明，在如下两个二重积分中，

 和 。

将被积函数中的变元换为，并不改变积分的值。因此

。

由于,故 。

1. 设, 在上连续，在内存在连续偏导数．．若在上满足方程 ．为有向曲线的外单位法向量，求极限 。

解：．利用格林公式第二种形式得到











.

（洛必达法则）

1. 计算积分：,

路径为沿任一条不与轴相交的曲线。

解： 由于 ,所以第二类曲线积分与路径无关。

可以求出的原函数为，所以



=。

1. 利用Stokes公式计算积分, 其中为圆周



从Ox轴的正向看去, 圆周的正向为逆时针方向.

解:前面（见第一部分题1）我们利用的参数方程直接计算出了积分。利用Stokes公式计

算则更简单。记为由圆周在平面上所围的部分（闭圆盘），其正法向与轴

正向成锐角。由Stokes公式得



其中为的单位正法向。由假设知.简单计算知



于是



其中为平面在球面部分内的面积. 解答完毕。

1. 设有向曲线是平面与球面的交线，从轴正向看去为逆时针为正向。求第二类曲线积分。

解：由球面方程可知，。

记为平面上包含于球面内的部分，规定的正法向与轴的正向成锐角。记。则积分可写作

。

简单计算得。根据Stokes公式得。

注意到的单位正法向，于是

。

1. 计算高斯积分，其中为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中为上点处的单位外法线向量，，．

**解**：记。则 .简单计算表明，证向量场的散度恒为零，即．因此当不包围原点时，向量场在由

所包围的闭区域内连续可微。因此利用Gauss公式立知面积分。

当包含围原点时，原积分等于向量场关于球面:（外侧）上的第二型面积分．于是

。